CÂTEVA INTUIȚII MATEMATICE PENTRU NOȚIUNI TEOLOGICE (PARTEA I)

Autor: Dragoș Manea | 4 februarie 2022

Introducere

Unele concepte teologice ortodoxe pot părea bizare și chiar inacceptabile pentru omul de știință ce lucrează preponderent cu adevăruri conforme intuiției empirice imediate. Totuși, cel puțin în domeniul matematic, lucrurile stau oarecum altfel. În continuare, voi încerca să demonstrez că o persoană familiară cu adevăruri matematice operează cu concepte cel puțin la fel de bizare și greu de intuit ca cele teologice.

Acest articol nu își propune nici pe departe să explice noțiunile teologice ce intervin pe parcurs, cum ar fi Sfânta Treime, Trupul lui Hristos, Întruparea etc., ci să arate că cei ce cunosc matematica în profunzime au întâlnit și folosesc în mod constant anumite concepte la fel de puțin intuitive cum sunt cele teologice enumerate mai sus.

Mă voi concentra pe ideea de numere cardinale, una importantă în teoria mulțimilor, încercând să fac o paralelă cu noțiunile teologice spre care trimit.

Numere cardinale

Numerele cardinale au apărut ca o generalizare a numărării obiectelor dintr-o mulțime, generalizare aplicată mulțimilor infinite (spre exemplu, mulțimea numerelor naturale, notată N, formată din numerele 0,1,2,3 și așa mai departe). În particular, ne interesează când două mulțimi (finite sau nu) au același număr de elemente.

În cazul mulțimilor finite, lucrurile stau simplu, trebuie doar să numărăm câte elemente sunt în fiecare mulțime și să comparăm rezultatele. În cazul infinit, lucrurile aparent se complică, dar, de fapt, totul se bazează pe o constatare elementară, ilustrată prin următorul exemplu.

Presupunem că avem o parcare foarte mare, cu mașini așezate pe două rânduri lungi, față în față. Pe rândul din dreapta sunt mașini roșii, pe cel din stânga sunt mașini albastre, iar toate locurile sunt ocupate. În acest caz, putem afirma imediat, fără a număra, că mașinile roșii sunt la fel de multe ca cele albastre, pur și simplu prin faptul că fiecărei mașini roșii îi corespunde exact o mașină albastră, cea parcată în fața ei.

O astfel de corespondență, în care fiecărui obiect din prima mulțime îi corespunde un unic obiect din cea de-a doua, se numește bijectivă. Din exemplul de mai sus, deducem că două mulțimi au același număr de elemente dacă există o astfel de asociere bijectivă între mulțimile studiate.

Avantajul acestei abordări este că ea funcționează și în cazul mulțimilor infinite. Nu mai este nevoie de a număra câte elemente are fiecare mulțime (demers imposibil de realizat, deoarece numărarea nu s-ar opri niciodată), ci este de ajuns să punem în evidență o corespondență bijectivă.

Proprietăți bizare ale mulțimii numerelor naturale

În continuare, voi aplica ideea de mai sus în cazul mulțimii N={0,1,2,3,...}, a numerelor naturale, și a mulțimii P={0,2,4,6,...}, a numerelor naturale pare. Construim asocierea astfel: numărului natural 0 îi asociem numărul par 0, apoi 1 va fi asociat cu 2. Numărul 2 va fi în corespondență cu 4, 3 cu 6 și așa mai departe, fiecare număr natural fiind asociat cu dublul său. Este clar că, procedând astfel, nu am omis niciun număr natural și niciun număr par, corespondența fiind una bijectivă.

Cu alte cuvinte, în mod paradoxal, numerele pare sunt la fel de multe ca toate numerele naturale. De fapt, această proprietate caracterizează mulțimile infinite. O mulțime este infinită, dacă are la fel de multe elemente ca o submulțime a ei.

În mod similar, asocierea 0→1, 1→3, 2→5,..., n→(2n+1), între mulțimea numerelor naturale și mulțimea numerelor impare, este bijectivă, de unde deducem că numerele impare sunt la fel de multe ca toate numerele naturale.

Prima intuiție teologică

Pentru a da prima intuiție teologică, voi împărți mulțimea numerelor naturale în trei părți, în funcție de restul împărțirii la 3 a componentelor. Astfel, prima mulțime, notată 3N, va conține elementele {0,3,6,9,12,...}, adică numerele naturale ce se împart exact la 3. Celelalte două mulțimi, notate 3N+1 și 3N+2, vor formate din numerele ce dau resturile 1, respectiv 2, la împărțirea prin 3. Cu alte cuvinte, 3N+1={1,4,7,10,13,...} și 3N+2={2,5,8,11,14,...}. Printr-un argument similar cu cel relativ la numerele pare și impare, vom arăta că toate cele trei mulțimi considerate sunt la fel de mari ca mulțimea N a numerelor naturale.

Nu trebuie decât să punem în evidență asocierile bijective. În cazul mulțimii 3N, aceasta este 0→0, 1→3, 2→6,..., n→3n. Pentru 3N+1, avem 0→1, 1→4, 2→7,..., n→3n+1. În final, pentru mulțimea 3N+2, corespondența este 0→2, 1→5, 2→8,..., n→3n+2. Remarcăm imediat și faptul că cele trei mulțimi de mai sus nu au elemente comune.

Astfel, am demonstrat că mulțimea N a numerelor naturale este formată din trei părți disjuncte, la fel de mari ca întreaga mulțime N. Fiind familiar cu acest fapt, matematicianului nu i se va părea deloc inacceptabil sau bizar să audă astfel de formulări:

> „Una și aceeași este unitate și Treime; aceeași întreagă unitate, și aceeași întreagă Treime; aceeași întreagă unitate după ființă, și aceeași întreagă Treime după ipostase. Căci dumnezeirea e Tată, Fiu şi Duh Sfânt, și dumnezeirea este în Tatăl, Fiul şi Duhul Sfânt. Aceeași e întreagă în întreg Tatăl; și Tatăl e întreg în aceeași întreagă. Și aceeași e întreagă în întreg Fiul; și Fiul e întreg în aceeași întreagă. Și aceeași e întreagă în întreg Duhul Sfânt; şi Duhul Sfânt e întreg în aceeași întreagă”[1].

Bineînțeles, intuiția nu este exactă și nici cuprinzătoare, deoarece, în cazul mulțimii numerelor naturale N, cele trei mulțimi sunt părți ale întregului, iar, pe de altă parte, în același text filocalic, Sf. Maxim Mărturisitorul afirmă că *Unul este Dumnezeu, pentru că una este dumnezeirea: Unitate fără de început, simplă, mai presus de ființă, fără parți şi neîmpărțită.*

A doua intuiție teologică

Rămânem în contextul submulțimilor mulțimii N, pentru a formula o a doua intuiție teologică. Vom construi o infinitate de părți infinite și disjuncte ale mulțimii N.

Pentru început, amintim noțiunea de număr prim. Un număr natural, diferit de 0 și 1, se numește prim, dacă se împarte exact numai prin 1 și prin el însuși. Spre exemplu, numărul 5 este număr prim, deoarece nu se împarte exact prin alte numere în afară de 1 și 5. Este un fapt cunoscut că numerele prime formează un șir infinit[2]. Acest șir începe cu numărul prim 2 și continuă cu 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 și așa mai departe. În cele ce urmează, vom nota cu p_n numărul aflat pe poziția n în șirul numerelor prime (adică p_1=2, p_2=3, p_3=5 etc.).

Fiecărui astfel de număr prim p_n îi vom asocia mulțimea puterilor sale, notată A_n, ce este formată din numerele pn, p_n^2, p_n^3, p_n^4 etc. Pentru exemplificare, cum p_2=3, obținem A_2={3,9,27,81,243,...}, fiecare număr din mulțime fiind triplul celui precedent. Nu este greu de văzut că, atunci când i și j sunt numere diferite, cele două mulțimi A_i și A_j nu au elemente comune, deoarece toate elementele din A_i se împart exact prin p_i, iar cele din A_j nu au această proprietate.

Revenind la subiectul numerelor cardinale, remarcăm că, pentru fiecare număr natural n, mulțimea $A_n=\{pn, p_n^2, p_n^3,\ldots\}$ are la fel de multe elemente ca mulțimea N a tuturor numerelor naturale. Într-adevăr, corespondența bijectivă între N și A_n este $0\rightarrow p_n$, $1\rightarrow p_n^2$, $2\rightarrow p_n^3,\ldots, k\rightarrow p_n^{k+1}$.

Construcția de mai sus demonstrează că mulțimea numerelor naturale poate fi împărțită într-un număr infinit de părți la fel de mari ca întreaga mulțime. Acest fapt nu poate să nu mă ducă cu gândul la rugăciunea rostită de preot înainte de împărtășirea din cadrul Sfintei Liturghii:

Se frânge și Se împarte Mielul lui Dumnezeu, Cel ce Se sfărâmă și nu Se desparte, Cel ce se mănâncă pururea și niciodată nu Se sfârșește (…)[3].

Cu toate acestea, la fel ca în cazul primei intuiții, nu am pretenția exactității, formularea „Se sfărâmă și nu Se desparte" fiind contrară ideii de părți distincte ale unui întreg, pe care o ilustrează mulțimile A_n.

Prin urmare, argumentul unor oameni care se declară atei, acela că, dacă nu „văd" (adică nu pot percepe intuitiv), nu pot crede în Dumnezeu, nu poate fi valabil în cazul matematicienilor. Aceștia acceptă cu ușurință rezultate ce, în ciuda faptului că nu pot fi „văzute" intuitiv, pot fi demonstrate matematic.

NOTE

1. Sf. Maxim Mărturisitorul, *A doua sută a capetelor gnostice*, Cap. 1, *Filocalia*, vol. II, trad. Pr. Prof. Dumitru Stăniloae, Apologeticum, 2005. ↑
2. pentru demonstrație, a se consulta: Număr prim – Wikipedia. ↑
3. Sfânta Liturghie a Sf. Ioan Gură de Aur, *Liturghier*, EIBMO, București, 2012. ↑

Imagine: Unsplash